V-55 (43min) 3-julio-2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Acción de Hilbert-Einstein (4)** **Hipersuperficie (frontera del espaciotiempo) y su métrica**

Vimos en (IV) de resumen video 54 la variación de la Acción $\delta S[g]$ al variar la métrica del espacio-tiempo $g^{\alpha\beta}$ en cantidad $\delta g^{\alpha\beta}$ (supone cambiar 16 valores o funciones de la matriz 4x4 que es $g^{\alpha\beta}$)

$$\delta s[g] = \int d^4x\ \sqrt{-g}\ \delta g^{\alpha\beta}\left[R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g_{\alpha\beta}\right] + \int d^4x \cdot \partial_\lambda\left(\sqrt{-g} \cdot J^\lambda\right)$$

En esa expresión, la segunda integral $\int d^4x \cdot \partial_\lambda\left(\sqrt{-g} \cdot J^\lambda\right)$ es un término relacionado con la frontera del espacio-tiempo, que si éste tiene 4 dimensiones, será una hipersuperficie de 3 dimensiones.

Hipersuperficie y su vector normal

En R^3 la superficie de, por ejemplo, una esfera en cartesianas se expresa: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ = cte, siendo una variedad 2D, pues al ser R cte, una coordenada se puede expresar en función de las otras dos: z = f (x, y)

Si estamos en un espacio-tiempo de 4 dimensiones con coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3), se generaliza la idea y una hipersuperficie 3D vendrá expresada por una función de las 4 coordenadas igualada a una constante:

$$\text{Hipersuperficie 3D}: \quad f\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = cte$$

En R^3 un vector normal a una superficie *f(x, y, z)= cte* tiene por componentes las derivadas parciales (gradiente).

Un vector normal a la hipersuperficie se obtiene: $\underline{n} = \partial_0 f\ e^0 + \partial_1 f\ e^1 + \partial_2 f\ e^2 + \partial_3 f\ e^3 = \partial_\mu f\ e^\mu$

Se justifica haciendo el producto escalar de un vector infinitesimal contenido en la hipersuperficie $dx^\alpha e_\alpha$ por el vector $\underline{n} = \partial_\mu f\ e^\mu$ y comprobando que resulta igual a la diferencial de la función $df = \partial_\alpha f\ dx^\alpha = 0$ que es nula, ya que *f = cte.* → luego ambos vectores son perpendiculares:

$$(dx^\alpha e_\alpha) \cdot (\partial_\mu f\ e^\mu) = \partial_\mu f\ dx^\alpha e_\alpha\, e^\mu = \partial_\mu f\ dx^\alpha\ \delta^\alpha_\mu = \left(si\ \mu = \alpha\ \rightarrow\ \delta^\alpha_\mu = 1\right) = \partial_\alpha f\ dx^\alpha = df = 0$$

El módulo del vector normal será: $|\underline{n}| = \sqrt{\underline{n} \cdot \underline{n}} = \sqrt{(\partial_\alpha f e^\alpha) \cdot (\partial_\beta f e^\beta)} = \sqrt{\partial_\alpha f \cdot \partial_\alpha f \cdot g^{\alpha\beta}}$

Si el interior de la raíz diese negativo (posible en el espacio-tiempo) se cambiaría de signo.

El vector normal a la hipersuperficie, normalizado (módulo unidad) es: $\boxed{\hat{\underline{n}} = \frac{\partial_\mu f}{\sqrt{\partial_\alpha f \cdot \partial_\alpha f \cdot g^{\alpha\beta}}}\, \underline{e}^\mu}$ **(I)**

Parametrización de la ecuación de la Hipersuperficie (3D)

En R^3, con el ejemplo de una superficie esférica de 2D, se podía parametrizar utilizando las dos coordenadas esféricas (θ, ϕ) que designaban puntos de dicha superficie en la que R= cte.

Los vectores de la base asociada a esas coordenadas, contenidos en la superficie, (ver video 3) se obtendrían:

$$\vec{e}_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \theta}\vec{e}_z\ ;\ \vec{e}_\phi = \frac{\partial x}{\partial \phi}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \phi}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \phi}\vec{e}_z \qquad \text{En general:}\quad \vec{e}_a = \frac{\partial x^\mu}{\partial p^a}\vec{e}_\mu \ \text{ donde } \ p^a = \{\theta, \phi\}$$

La expresión anterior se puede generalizar para un espacio-tiempo (4D) y una hipersuperficie (3D) que lo limita. La base asociada a **coordenadas (parámetros)** $p^a = \{p^0, p^1, p^2\}$, que designan puntos de dicha hipersuperficie, será:

$$\boxed{\underline{e}_a = \frac{\partial x^\mu}{\partial p^a}\, \underline{e}_\mu} \qquad \textbf{(II)}$$

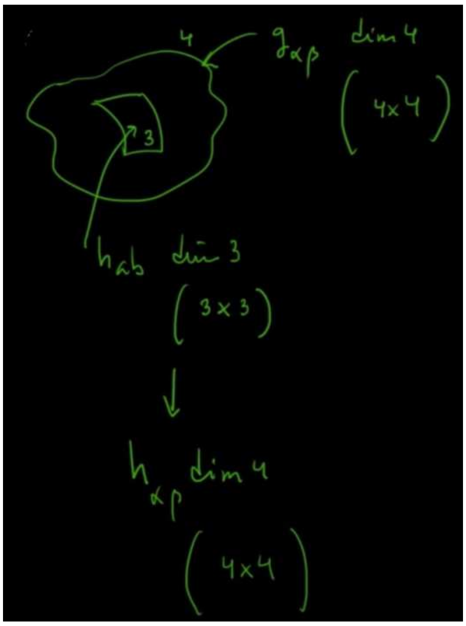
Métrica inducida en la Hipersuperficie (3D)

Recordemos que entre el video 33 y 34 había ejercicios para hallar la métrica inducida en una superficie, inmersa en un espacio ambiente. Se hacía, a partir de la métrica del espacio ambiente, introduciéndole las restricciones que debían cumplir los puntos de la superficie. Así se calculó la métrica inducida de superficie esférica, superficie cónica, superficie cilíndrica, superficie toroidal, etc.

La métrica del espacio-tiempo ambiente (4D) es $\boldsymbol{g_{\alpha\beta}} = \boldsymbol{e_\alpha} \cdot \boldsymbol{e_\beta}$. Igualmente, sin necesidad de conocer la ecuación $f(x^0, x^1, x^2, x^3) = cte$ de la hipersuperficie, obtenemos su métrica haciendo los productos escalares de los vectores de su base $\boldsymbol{h_{ab}} = \boldsymbol{e_a} \cdot \boldsymbol{e_b}$, que será una matriz (3x3), ya que "a" y "b" sólo toman 3 valores:

$$h_{ab} = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial p^a}\, e_\alpha\right) \cdot \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial p^b}\, e_\beta\right) \rightarrow \quad \boldsymbol{h_{ab} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial p^a} \cdot \frac{\partial x^\beta}{\partial p^b} \cdot g_{\alpha\beta}} \qquad \textbf{(III)}$$

Métrica transversa (proyector) en la Hipersuperficie



La métrica del espaciotiempo ambiente (4D) es una matriz $\boldsymbol{g_{\alpha\beta}}$ (4x4)

La métrica inducida en la Hipersuperficie (3D) es una matriz $\boldsymbol{h_{ab}}$ (3x3)

Para facilitar los cálculos conviene utilizar en la hipersuperficie una métrica que también sea matriz (4x4). Es la que conocemos como métrica transversa (ó proyector de la métrica $\boldsymbol{g_{\alpha\beta}}$ sobre la hipersuperficie). Se define:

$$\boldsymbol{h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta} \qquad \textbf{(IV)}$$

Obsérvese que para los elementos de $\boldsymbol{h_{\alpha\beta}}$ utilizamos coordenadas del espaciotiempo ambiente 4D $\boldsymbol{x^\alpha \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)}$, en vez de las coordenadas (parámetros) $\boldsymbol{p^a \equiv (p^0, p^1, p^2)}$ que designan puntos de la la hipersuperficie 3D. No obstante, al restar a la matriz $g_{\alpha\beta}$ (4x4), del espaciotiempo ambiente, la de hacer los productos $n_\alpha n_\beta$ (para todos los valores de α y β resultará otra matriz (4x4)**,** se pude comprobar que la matriz $\boldsymbol{h_{\alpha\beta}}$ (4x4) que resulta distingue entre los objetos que "viven" en la hipersuperficie de los que están fuera de ella.

En el video la comprobación se hace calculando el producto escalar de un vector normal a la hipersuperfice por él mismo: $\underline{n} \cdot \underline{n}$ **,** que sabemos que no "vive" en la hipersuperficie. Al hacerlo utilizando la métrica general veremos que resulta distinto de cero, mientras que utilizando la métrica transversa el resultado es nulo.

Utilizando la métrica $\boldsymbol{g_{\alpha\beta}}$: $\underline{n} \cdot \underline{n} = n^\alpha e_\alpha \cdot n^\beta e_\beta = n^\alpha n^\beta (e_\alpha \cdot e_\beta) = n^\alpha n^\beta \boldsymbol{g_{\alpha\beta}} = n^\alpha n_\alpha = 1$

Utilizando métrica $\boldsymbol{h_{\alpha\beta}}$: $\underline{n} \cdot \underline{n} = n^\alpha n^\beta h_{\alpha\beta} = n^\alpha n^\beta (\boldsymbol{g_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta}) = n^\alpha n^\beta g_{\alpha\beta} - n^\alpha n_\alpha\, n^\beta n_\beta = 1 - 1 = 0$

<u>Al aplicar un principio variacional a la acción de Hilbert-Einstein</u>, variando la métrica del espacio tiempo en $\delta g^{\alpha\beta}$, deberemos mantener fija la métrica en la frontera, lo que supondrá considerar que la métrica transversa de la hipersuperficie que envuelva al espacio tiempo, debe ser constante → $\boldsymbol{h_{\alpha\beta}}$ = cte.